

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה להנדסת חשמל
המעבדה לעיבוד אותות פיזיולוגיים

תזריך ניסוי שערוך על סמך אותות *EMG*

נכתב על ידי אהוד טרינין בשנת 2006.
מבוסס בחלקו על תזריק שכתב אלעד יוט טוב,
בהנחיית פרופ' גדעון צנבר בשנת 1999.

הקדמה

1. המעבדה מיועדת לסטודנטים המתעניינים בעיבוד אותות פיזיולוגיים או בעיבוד אותות אקראיים בכלל. אותות אקראיים הוא בסיס חשוב לתחומים רבים ובפרט לתחום של אותות ומערכות ביולוגיים. במעבדה זו, נעשה ניסיון לגעת בנושא זה בצורה ברורה ופשוטה ככל האפשר, תוך מתן דגש על אינטואיציה, הבנת העקרונות והיישום המעשי.
2. סטודנטים המעוניינים ברקע הביולוגי המינימאלי הדרוש לביצוע הניסוי, יכולים להסתפק בקריאת החלק העוסק בתדרי עירור. יתר הרקע הביולוגי בתדריך הוא העשרה, שנועדה לסטודנטים המתעניינים באותות ומערכות ביולוגיים ובפרט בנושא של בקרה תנועה ביולוגית. מידע נוסף על פרויקטים בבקרת תנועה ביולוגית ניתן למצוא באתר המעבדה <http://pspl.technion.ac.il>.
3. מקצועות קדם (ניתן לקחת גם במקביל):
אותות אקראיים, מבוא לעבוד ספרתי של אותות.
מקצועות מומלצים:
אותות ומערכות ביולוגיים, מבוא לעבוד אותות אקראיים.
4. בתחילת הסמסטר יש להירשם לימים ולשעות שבהן תבצעו את הניסוי. אתם מתבקשים להגיע למעבדה בשעות שנקבעו.
הניסוי כולל השתתפות בשתי פגישות במעבדה. יש חובת נוכחות בשתי פגישות המעבדה ובמשך כל זמן הפגישה (4 שעות).
5. לכל אחד מחלקי המעבדה דו"ח מכין נפרד.
אתם מתבקשים להגיע לכל אחת מהפגישות עם דו"ח ההכנה של אותה פגישה מלא ומוכן להגשה.
יש להדפיס בדו"ח את פונקציות ה-MATLAB שנתבקשתם לכתוב.
שאלות בנוגע לביצוע הדו"ח המכין יש להפנות אל מדריך המעבדה לפני הפגישה.
6. הציון כולל את המרכיבים הבאים:
דו"חות הכנה: 20%.
ביצוע: 50%.
דו"ח מסכם – 30% + אפשרות לבונוס.
מרכיב חשוב בביצוע הניסוי הוא בחינה בע"פ בה הנכם נדרשים להסביר את עבודתכם בדו"ח המכין. סטודנטים, המשקיעים את העבודה הנדרשת, צפויים לקבל ציונים גבוהים, גם אם אין להם רקע חזק בתחום. מצד שני, יהיה תשלום גבוה לחוסר שליטה והבנה בדוחות המוגשים, או להגשת דוחות, הדומים באופן בלתי סביר לדוחות של זוגות אחרים מהסמסטר או מסמסטרים קודמים.
7. יש לשלוח בדוא"ל למדריך המעבדה את הדו"ח המסכם שבועיים לאחר הפגישה השנייה.

נספח בטיחות

מעבדת התמחות במסגרת מעבדות 1\3\2 ח' בטיחות

כללי:

תמצית הנחיות בטיחות מובאת לידיעת הסטודנטים כאמצעי למניעת תאונות בעת ביצוע ניסויים ופעילות במעבדה לחקר הראייה ומדעי התמונה. מטרתן להפנות תשומת לב לסיכונים הכרוכים בפעילויות המעבדה, כדי למנוע סבל לאדם ונזק לציוד. אנא קיראו הנחיות אלו בעיון ופעלו בהתאם להן.

מסגרת הבטיחות במעבדה:

אין לקיים ניסויים במעבדה ללא קבלת ציון עובר בקורס הבטיחות של מעבדות ההתמחות באלקטרוניקה (שהינו מקצוע קדם למעבדה זו). לפני התחלת הניסויים יש להתייזב בפני מדריך הקבוצה לקבלת תדריך ראשוני והנחיות בטיחות. אין לקיים ניסויים במעבדה ללא השגחת מדריך ללא אישור מראש. מדריך הקבוצה אחראי להסדרים בתחום פעילותך במעבדה; נהג על פי הוראותיו.

עשה ואל תעשה:

יש לידע את המדריך או את צוות המעבדה על מצב מסוכן וליקויים במעבדה או בסביבתה הקרובה. לא תיעשה במזיד ובלי סיבה סבירה, פעולה העלולה לסכן את הנוכחים במעבדה. אסור להשתמש לרעה בכל אמצעי או התקן שסופק או הותקן במעבדה. היאבקות, קטטה והשתטות אסורים. מעשי קונדס מעוררים לפעמים צחוק אך הם עלולים לגרום לתאונה. אין להשתמש בתוך המעבדה בסמים או במשקאות אלכוהוליים, או להיות תחת השפעתם. אין לעשן במעבדה ואין להכניס דברי מאכל או משקה. בסיום העבודה יש להשאיר את השולחן נקי ומסודר. בניסיון לחלץ דפים תקועים במדפסת - שים לב לחלקים חמים!

בטיחות חשמל:

בחלק משולחנות המעבדה מותקנים בתי תקע ("שקעים") אשר ציוד המעבדה מוזן מהם. אין להפעיל ציוד המוזן מבית תקע פגום. אין להשתמש בציוד המוזן דרך פתילים ("כבלים גמישים") אשר הבידוד שלהם פגום או אשר התקע שלהם אינו מחוזק כראוי. אסור לתקן או לפרק ציוד חשמלי כולל החלפת נתיכים המותקנים בתוך הציוד; יש להשאיר זאת לטפול הגורם המוסמך.

מפסקי לחיצה לשעת חירום:

בחדר 666 אין מפסקים ראשיים להפסקת אספקת החשמל.
ארון החשמל הרלוונטי נמצא ליד המעליות – מפתח אצל אחראי בניין. קומה 2 טל. 4776.

בטיחות אש, החייאה ועזרה ראשונה:

במעבדה ממוקמים מטפי כיבוי אש זהה את מקומם.
אין להפעיל את המטפים, אלא בעת חירום ובמידה והמדריכים וגורמים מקצועיים אחריים במעבדה אינם יכולים לפעול.

יציאות חירום:

בארוע חירום הדורש פינוי, כגון שריפה, יש להתפנות מיד מהמעבדה.
דרכי מילוט במקרה חרום קומה 6:
צד צפוני: מדרגות לכיוון בניין פישבך.
צד דרומי: בסוף הפוזדור ישנה דלת למדרגות חרום – יש לנפץ זכוכית ע"מ לחלץ מפתח חרום.

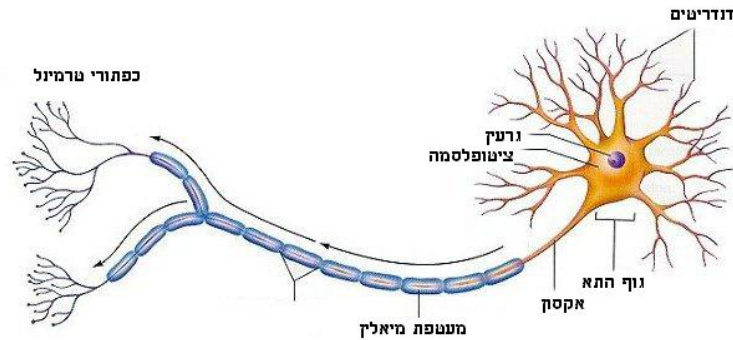
דיווח בעת אירוע חירום:

יש לדווח **מידית** למדריך ולאיש סגל המעבדה.
המדריך או איש סגל המעבדה ידווחו מיידיית **לקצין הביטחון בטלפון; 2740, 2222.**
במידה ואין הם יכולים לעשות כך, ידווח אחד הסטודנטים לקצין הביטחון.
לפי הוראת קצין הביטחון, או כאשר אין יכולת לדווח לקצין הביטחון, יש לדווח, לפי הצורך:
משטרה 100,
מגן דוד אדום 101,
מכבי אש 102,
גורמי בטיחות ו/או ביטחון אחרים.
בנוסף לכך יש לדווח ליחידת סגן המנמ"פ לעניני בטיחות; 3033, 2146/7.
בהמשך, יש לדווח **לאחראי משק ותחזוקה; 4776, 052-419917**
לסיום, יש לדווח ל:
אחראי האקדמי (פרופ' רון מאיר חדר 605 טל. 4658)
עוזר למנהל (קומה 8, טל. 4678)
מהנדס המעבדה חדר 604, טל. 4729
יתר צוות המעבדה:
אינה - חדר 615, טל. 4727
אלי - חדר 608, טל. 4723
אינה - חדר 615 (בחדר פנימי 617) טל. 4782

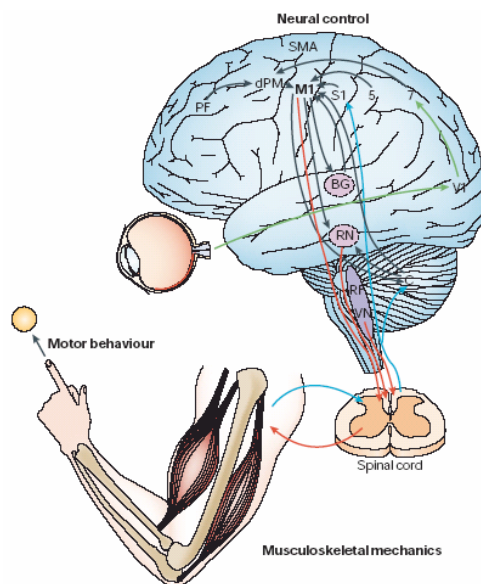
רקע ביולוגי

מערכת העצבים

במוח אדם בוגר כמאה מיליארד תאי עצב. כל תא עצב מקושר בד"כ ל 10,000-1000 תאי עצב אחרים. תאי העצב מורכבים מדנדריטים, גוף ואקסון.

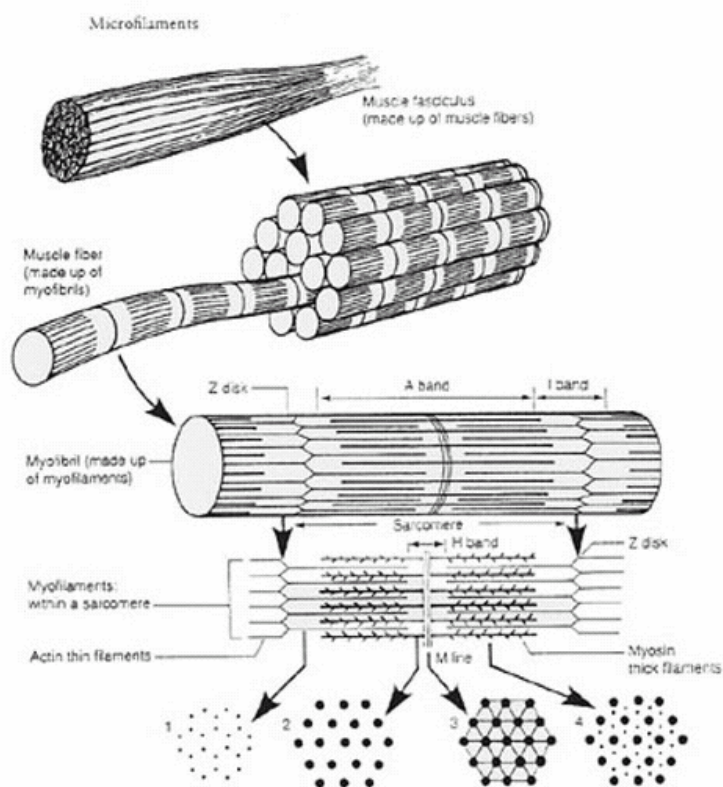


הדנדריטים מקבלים אותות כימיים מתאי עצב אחרים והופכים אותם לאותות חשמליים. גרעין התא "מעבד" את האותות החשמליים המגיעים מהדנדריטים ו"מחליט" בהתאם לתוצאת העיבוד אם לשלוח או לא לשלוח ברגע מסוים פוטנציאל פעולה לאקסון. פוטנציאל פעולה הוא גל של הפרש מתחים בין פנים תא העצב לחוץ תא העצב. גל חשמלי זה נע מגרעין התא אל קצוות האקסון. בקצוות האקסון קיימים טרמינלים ההופכים את האות החשמלי לאות כימי המועבר בדרך כלל לתא עצב אחר. יוצאים מן הכלל הם תאי עצב הנקראים motor neurons. תאים אלו מעבירים אותות לתאי שריר. בבקרת תנועה ביולוגית משתתפים אזורים רבים ממוח האדם בינם מוח השדרה, גזע המוח, הקורטקס המוטורי הראשוני, אזורים פרה-מוטוריים ופרה-פרה-מוטוריים של הקורטקס, הצרבלום וגרעיני הבסיס. חלקי מוח אלו משפיעים באופן ישיר ו/או עקיף על ה motor neurons. ה motor neuron נמצאים במוח השדרה ובגזע המוח ומקושרים ישירות לשרירים.



השרירים

בגוף קיימים שלושה סוגי שרירים: שריר לב, שרירים חלקים ושרירי שלד. בגוף מאות שרירי שלד, שרובם מחובר בגידים לעצמות. שרירי השלד מאפשרים את תנועת הגוף וניתנים לשליטה מודעת או רצונית. השריר נחלק לאגודות. כל אגודה בנויה מתאי שריר (הנקראים גם סיבי שריר) בעלי צורת גליל. כל תא שריר מכיל סיבים הקרויים Myofibrils, המכילים תתי סיבים הקרויים Myofilaments. ה Myofilament מכיל חלבוני Actin ו-Myosin, הנעים זה כלפי זה בעזרת אנרגיה, המתקבלת מהפיכת מולקולת ATP למולקולת ADP ובנוכחות יוני סידן (Ca^{2+}) המשמשים כזרז. זהו הבסיס הביוכימי להתכווצות השריר. מנגנון זה נשלט באמצעות בקרה על ריכוז יוני הסידן בסיבי השרירים.

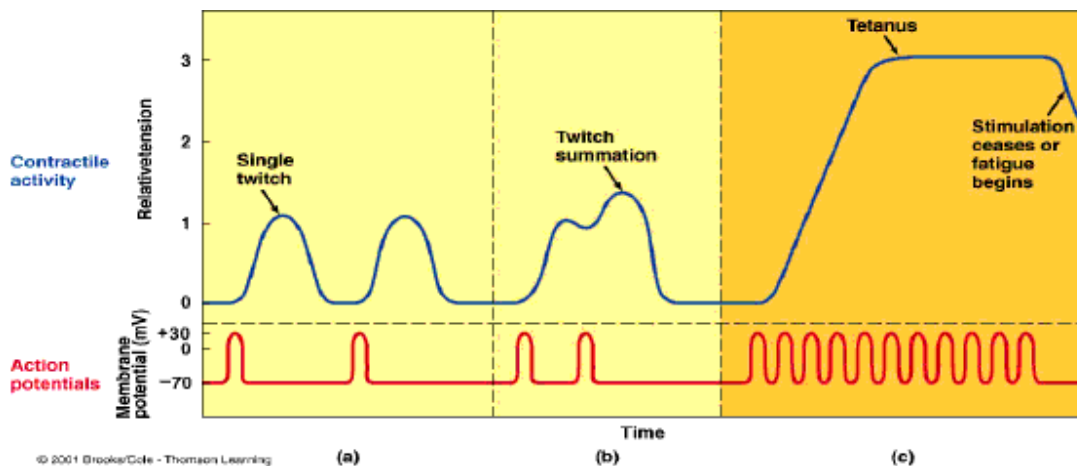


כאשר מגיע אות עצבי לסיב השריר הוא גורם להתפשטות של גל חשמלי לאורך סיב השריר. גל חשמלי זה גורם לפתיחת תעלות מיוחדות בדופן הסיב, המאפשרות כניסת יוני סידן, שגורמים להתכווצות סיב השריר. סך כל האותות החשמליים העוברים לאורך סיבי השרירים באזור מסוים בגוף, ניתנים להקלטה באמצעות אלקטרודות שטח. בניסוי תמדדו ותנתחו אות זה, הנקרא Electomyogram או בקיצור EMG.

תדרי עירור

כל סיב שריר מופעל על ידי motor neuron יחיד. ה motor neuron יחד עם סיבי השריר המופעלים על ידו קרויים יחידה מוטורית. תדר הפעולה של ה motor neuron, שהינו גם תדר הפעולה החשמלי של סיבי השריר המופעלים על ידו, מוגבל לטווח ערכים מסויים. קיים תדר עירור מקסימאלי שערכו בסביבות ה 100Hz. קיומו של תדר המקסימאלי נובע מכך שלאחר ירי עצבי, תא העצב נכנס לתקופה רפרקטורית של כ 10msec, בה הוא אינו יכול לשלוח עירור עצבי נוסף. בניסוי נראה גם תופעה של תדר פעולה מינימאלי של ה motor neuron. תדר זה נקרא תדר הגיוס של היחידות המוטוריות וערכו 8-12Hz. ההסבר לקיומו של תדר פעולה מינימאלי קשור בתופעות הבאות: (1) עם עליית המאמץ, האותות העצביים המגיעים אל ה motor neuron משתנים, באופן הגורם לעליה הדרגתית במתח הגרעין של ה motor neuron (2) בשל הדינאמיקה הלא ליניארית של מתח הממבראנה בגרעין תא העצב, התדר משתנה בבת אחת מתדר אפס לתדר סף מסויים.

מידת הכיווץ של סיב השריר תלויה בתדר פוטנציאלי הפעולה הנשלחים אליו מה motor neuron.



ככל שיגדל תדר העירור העצבי, יגדל גם ממוצע הכוח שמפעילה היחידה המוטורית עד הגעה למצב רוויה, הקרוי טטנוס.

שימו לב שבניסוי השריר מפעיל כוח קבוע בקירוב, בעוד שמידת הכיווץ של יחידה מוטורית משתנה בזמן (למעט מצב של טטנוס). דבר זה אינו מהווה סתירה משום שהכוח שמפעיל השריר נובע מפעולתן הבו-זמנית של יחידות מוטוריות רבות.

כאשר יש צורך בהגדלת המאמץ המופעל על יד השריר המוח מבצע את הדברים הבאים:

(1) הגדלת תדר העירור של יחידות מוטוריות הנמצאות בפעולה.

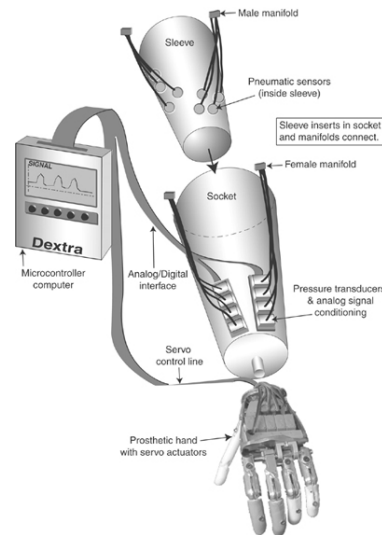
(2) גיוס של יחידות מוטוריות נוספות. כפי שהוזכר, יחידות אלו מתחילות לפעול בתדר גיוס היחידות.

תדרי הפעולה של היחידות המוטוריות מתבטא בתכולת התדר של אות ה EMG.

כמות היחידות המוטוריות המופעלות מתבטא בעוצמת אות ה EMG.

ההקשר ההנדסי

המערכת המוטורית הביולוגית קשורה למחקר ההנדסי הן בהיבט של יישומים רפואיים והן בהיבט טכנולוגי כללי. בהיבט הרפואי, נעשים מחקרים שמטרתם הוא לשקם יכולת תנועה שנפגעה כתוצאה מקטיעת גפה, פגיעה בעמוד השדרה, שבץ מוחי ועוד. חלק מהדברים הנעשים בתחומים אלו מזכיר את הסרט Matrix, אם כי הדרך לשם עוד ארוכה. לדוגמא, בשנים האחרונות נעשים ניסויים, בהם זרוע רובוטית מופעלת בעזרת שידור אותות עצביים מהמוח אל רכיב בקרה, שמתרגם אותות אלו לפקודות מנוע. טכנולוגיות מסוג זה מציבות אתגרים הנדסיים בהיבט החומרה (שתהיה מסוגלת, למשל, להשתלב בתוך רקמה אורגנית לאורך זמן ולדגום מידע עצבי ברוב פס גבוה ככל האפשר) ובהיבט האלגוריתמי של עיבוד האותות.



בהיבט הטכנולוגי הכללי, קיימת שאיפה ללמוד פתרונות של הטבע, לצורך יישום במערכות מלאכותיות. המערכת המוטורית הביולוגית בעלת מספר גדול מאוד של דרגות חופש. לדוגמא, כאשר אנו מעבירים חפץ ממקום אחד לאחר בעזרת היד, קיימות אינסוף דרכים לבחירת המסלול במרחב ובזמן בו תנוע היד. יתירה מזאת, כל מסלול כזה ניתן לביצוע באינסוף דרכים בשל היתירות הרבה במפרקים, בשרירים ובאוקלוסיות של תאי עצב המפעילים את השרירים. המוח בוחר מבין אינספור אותות הבקרה, המבצעים את המשימה, אות בקרה שיהיה מוצלח מבחינות שונות, כגון מהירות, דיוק וחסכון באנרגיה. כמו כן, מערכת זו נדרשת לפעול במגוון רחב מאוד של תנאים, עומסים ומשימות, כולל אי ודאות בכוחות מולם פועלים. המוח צריך לבצע כל זאת בתנאי רעש, הקיים בתוך המערכת המוטורית ובהינתן שההיות מאוד ארוכות להעברת פקודה לגוף ולקבלת משוב חושי על מצבו. בנוסף, המוח צריך להסתגל לשינויים הקורים במערכת הביו-מכאנית כתוצאה מגדילה, פגיעה, שינויים במשקל או בכושר; כמו גם לשינויים רגועים כתוצאה מהתעייפות השרירים. המוח ממשיך לתפקד גם לאור העובדה, שכל הזמן תאי עצב מתים ואף מצליח להשתקם בעקבות פגיעה בחלקים שלמים.

מערכות רובוטיות יכולות להיות מאוד חזקות, מהירות או מדויקות, אך אף מערכת טכנולוגית כיום, אינה מתקרבת לביצועיה מערכת בקרת התנועה הביולוגית בהיבטים של רבגוניות, ניצול יתירות ויכולת הסתגלות. קיימת עדיין הבנה מועטה ביותר לגבי האופן בו המוח מצליח להתמודד עם בעיות חישוב ולמידה כה מורכבות. עם זאת, המחקר של בקרת התנועה של המוח מתקדם בהדרגה, תוך הפריה הדדית עם המחקר הטכנולוגי בתחומים של רובוטיקה, בקרה ומערכות לומדות.

חלק א'

דו"ח מכין

סטציונריות במובן הרחב

תהליך אקראי הוא סטציונרי במובן הרחב (סמ"ר) אם:

$$(1) \text{ לכל } n \text{ מתקיים } E[X(n)] = \mu, \text{ כלומר אינו תלוי ב-} n.$$

$$(2) \text{ לכל } m \text{ ו-} n \text{ מתקיים } E[X(n)X(m)] = R(|n-m|), \text{ כלומר תלוי רק ב-} |m-n|.$$

בניסוח חופשי: המומנטים מסדר ראשון ושני (תוחלת ואוטוקורלציה) של התהליך אינם משתנים בזמן.

ניתוחים שונים של אותות אקראיים, כדוגמת חישוב ספקטרום, נכונים רק בתנאי שהאות סמ"ר. הנחה זו איננה מובנת מאליה ועל כן קיימים מבחנים סטטיסטיים לבדיקת סטציונריות במובן הרחב של אותות אקראיים. פעמים רבות אותות פיזיולוגיים אינם סמ"ר. במקרים רבים, האות הפיזיולוגי הנמדד הוא סמ"ר, הודות לתנאי הבדיקה. לדוגמה, מדידת דופק לב כאשר הנבדק נמצא במצב מנוחה. אותות שאינם סמ"ר קשים יותר לניתוח, אם כי קיימות שיטות לניתוח של אותות כאלו.

שאלה 1

$$(א) \text{ נתון האות } x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n - \phi\right) \text{ כאשר } \phi \text{ אקראי ומפולג אחיד ב-} [0, 2\pi].$$

$$\text{ניתן לראות שלכל } \phi, x(n) \cdot x(n+1) = \begin{cases} 0.5 \sin(2\phi) & n \text{ even} \\ -0.5 \sin(2\phi) & n \text{ odd} \end{cases}, \text{ לפיכך, לכל פונקציה מדגם עם}$$

$$E[X(n)X(m)] \text{ עבור } |m-n|=1 \text{ משתנה כתלות ב-} n \text{ (זוגי או}$$

אי-זוגי) ולכן האות איננו סמ"ר.

האם ההוכחה שלעיל נכונה? אם כן, תנו הסבר אינטואיטיבי לכך שהאות אינו סמ"ר. אם לא, הסבירו מהי השגיאה בהוכחה וכיצד יש לתקנה.

(ב) חברת הזנק פיתחה תוכנה לחיזוי תוצאות של מרוצי סוסים. החברה הניחה מודל של סוס ליניארי

וקבוע בזמן, הניזון מרעש לבן גאוס. היה זה רעיון נפלא, אם כי היישום נכשל באשמת הסוסים שלא

הצליחו להבין את המודל. הנח שמהירות הסוס היא $Y(n) = -aY(n-1) + u(n)$ כאשר $|a| < 1$ ו-

$u(n)$ הוא רעש לבן גאוס בעל שונות 1. שימו לב שהסוס יכול לרוץ גם אחורה. האם התהליך $Y(n)$

סמ"ר? הוכיחו תשובתכם.

ארגודיות

תהליך סמ"ר הוא ארגודי בממוצע ריבועי במובן הרחב אם

$$(1) \lim_{N \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N X(n) - \mu\right]^2 = 0 \quad \text{where } \mu = E[X(n)]$$

$$(2) \lim_{N \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N X(n)X(n-k) - R(k)\right]^2 = 0 \quad \forall k \quad \text{where } R(k) = E[X(n)X(n-k)]$$

בניסוח חופשי: מיצוע בזמן של פונקציות מדגם בודדת שקול למיצוע של כל פונקציות המדגם בנקודות זמן מסוימת.

שאלה 2

- (א) מדוע סטציונריות במובן הרחב היא תנאי הכרחי לארגודיות במובן הרחב?
 (ב) האם סטציונריות במובן הרחב היא תנאי מספיק לארגודיות במובן הרחב? הוכיחו או הפריכו באמצעות דוגמא נגדית.
 (ג) מה החשיבות המעשית של תכונת הארגודיות?

שערוך פונקצית האוטוקורלציה

בהינתן מדגם של התהליך באורך N , קיימות שתי שיטות מקובלות לשערוך פונקצית האוטוקורלציה

$$(1) \hat{r}_U(k) = \frac{1}{N-|k|} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} y(n)y(n+|k|) \quad U = unbiased$$

$$(2) \hat{r}_B(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} y(n)y(n+|k|) \quad B = biased$$

הטיה של משערך מוגדרת בתור $b(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$.

משערך חסר הטיה הוא משערך עבורו $b(\hat{\theta}) = 0$.

סדרת משערכים היא חסרת הטיה אסימפטוטית אם $\lim_{N \rightarrow \infty} b(\hat{\theta}_N) = 0$.

סדרת משערכים היא עקבית אם $\lim_{N \rightarrow \infty} E_\theta[(\hat{\theta}_N - \theta)^2] = 0$.

אם $E_\theta[(\hat{\theta}_N - \theta)^2]$ מתכנסת "במהירות" אזי סדרת המשערכים $\hat{\theta}_N$ היא יעילה אסימפטוטית. הכוונה במתכנסת "במהירות" היא משיגה את חסם קרמר-ראו (שלא ילמד במסגרת זו).

המשערך $\hat{r}_u(k)$ מדויק יותר מהמשערך $\hat{r}_B(k)$. למרות זאת, נהוג להשתמש במשערך $\hat{r}_B(k)$ ולא במשערך $\hat{r}_u(k)$

וזאת משום ש $\hat{r}_B(k)$ מבטיח את הדברים הבאים:

(1) ספקטרום חיובי

(2) מודל AR יציב של התהליך (משערך Yule-Walker).

מודל AR, הידוע גם בתור משערך Yule-Walker הוא אחד המודלים הפשוטים והשימושיים ביותר של אותות אקראיים. מודל זה אינו נלמד במסגרת ניסוי זה. עם זאת, נציין שלמודלים של אותות אקראיים יש מגוון שימושים, כגון, הבנת התהליכים הפיזיולוגיים שיצרו את התהליך, דיאגנוסטיקה רפואית, שערוך וחיזוי לצורך

הפעלה בזמן אמת של עזרים רפואיים.

שאלה 3

א) האם משערך מוטה הוא בהכרח פחות טוב (במובן של תוחלת שגיאה ריבועית) ממשערך בלתי מוטה? הסבירו.

ב) אילו הנחות יש להניח על התהליך ועל המדגם על מנת שהשימוש במשערך $\hat{r}_u(k)$ יהיה מוצדק וכיצד הנחות אלו מתבטאות בחישוב? האם $\hat{r}_u(k)$ חסר הטיה? האם הוא חסר הטיה אסימפטוטית?

ג) אילו הנחות יש להניח על התהליך ועל המדגם על מנת שהשימוש במשערך $\hat{r}_B(k)$ יהיה מוצדק וכיצד הנחות אלו מתבטאות בחישוב? האם $\hat{r}_B(k)$ חסר הטיה? האם הוא חסר הטיה אסימפטוטית?

צפיפות ספקטרלית

יהי $x(n)$ אות סמ"ר שפונקציית האוטוקורלציה סכימה בהחלט, כלומר $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |r(k)| < \infty$, אזי הצפיפות

הספקטרלית הינה התמרת פורייה של פונקציית האוטוקורלציה של התהליך $S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k)e^{-j\omega k}$

בניתוח של אותות אקראיים משתמשים בצפיפות הספקטרלית ולא בהתמרת פורייה של האות וזאת משום שהתמרת פורייה של האות אינה בהכרח מתכנסת.

שאלה 4

יהי $x[n]$ תהליך סטציונרי, ארגודי עם פונקציית אוטוקורלציה סכימה בהחלט.

נתון לנו מקטע באורך N של פונקציית מדגם אחת של האות

$$x[n] \quad 0 \leq n \leq N-1$$

על סמך מקטע זה נשערך מקטע של פונקציית האוטוקורלציה על ידי

$$\hat{r}_B[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x[n]x[n+|k|] \quad -(N-1) \leq k \leq N-1$$

ונשתמש בתוצאה זאת על מנת לשערך את הצפיפות הספקטרלית של האות על ידי

$$\hat{S}_N(\omega) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_B[k]e^{-j\omega k}$$

כמו כן, נגדיר

$$X_N(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$$

א) הוכח כי

$$\hat{S}_N(\omega) = \frac{1}{N} |X_N(\omega)|^2$$

ב) אילו משתי שיטות החישוב של $\hat{S}(\omega)$ עדיפה? הסבר.

ג) הוכח כי $\hat{S}_N(\omega)$ חסר הטיה אסימפטוטית.

ד) כתבו פונקציית MATLAB בשם spectrum_1, המקבלת $x[n]$ ומחזירה את $\hat{S}_N(\omega)$.

החלקה

כפי שהתבקשתם להוכיח בשאלה 4, $\hat{S}_N(\omega)$ חסר הטיה אסימפטוטית.

עם זאת, ניתן להוכיח כי $\hat{S}_N(\omega)$ אינו משערך עקבי. משמעות הדבר שהגדלת אורך המדגם, שלעצמה, לא תביא להקטנת שונות המשערך.

על מנת להקטין את שונות המשערך, ניתן לחלק את האות למקטעים, לשערך את הצפיפות הספקטרלית של כל מקטע כזה בנפרד ולבסוף, לחשב את הממוצע של הצפיפויות הספקטרליות. פעולה זו נקראת החלקה.

שאלה 5

א) תנו הסבר אינטואיטיבי לכך ש $\hat{S}_N(\omega)$ אינו עקבי. רמז: התבוננו בביטוי של משערך האוטוקורלציה

$$\hat{r}_B[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x[n]x[n+|k|] \quad -(N-1) \leq k \leq N-1$$

מדוע פעולת החלקה פותרת בעיה זו?

ב) לצורך החלקה מחלקים אות ל M קטעים. מהם השיקולים בבחירת M? מהם היתרונות והחסרונות

בהגדלה או בהקטנה של M עבור אות באורך נתון?

ג) כתבו פונקציית MATLAB בשם spectrum_2, המקבלת את $x[n]$ ומחזירה שערך של

ספקטרום האות עם החלקה.

יש לבצע את החלקה על ידי חלוקת האות ל 58 קטעים באורך 251 כל אחד, החופפים זה את כמעט במחצית, כלומר האינדקסים של קטע n הם $(126n+125)K$ $(126n-125)K$, כאשר $n = 1, 2, K, 58$.

הניחו שאורך האות הוא $126 * 58 + 125 = 7433$ ולכן ניתן לבצע את החלוקה באופן מדויק, ללא צורך בקיטוע או בריפוד של האות.

שערכו את הצפיפות הספקטרלית של כל מקטע ומצעו את תוצאות השערך.

שימוש בחלון

עד כה התעלמנו מכך שהספקטרום משוערך על סמך מקטע סופי של האוטוקורלציה.

הספקטרום המשוערך ניתן לכתובה באופן הבא:

$$\hat{S}_N(\omega) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_B[k] e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_N[k] \hat{r}_B[k] e^{-j\omega k} \quad W_N[k] = \begin{cases} 1 & |k| < N \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

כלומר, הספקטרום המחושב הוא התמרת פורייה של מכפלת שערך האוטוקורלציה בחלון ריבועי.

כזכור, הכפלה בחלון ריבועי בזמן, שקולה לקונבולוציה עם פונקציית sinc בתדר. פעולה זאת יוצרת עיוותים בשערך של הצפיפות הספקטרלית.

ניתן להקטין בעיה זו על ידי הכפלת האות בזמן בחלון שאיננו מלבני.


שאלה 6

- (א) מה טיבם של העיוותים בתדר, הנוצרים כתוצאה מהכפלת האות בחלון ריבועי בזמן? מדוע היכולת של חלונות אחרים לצמצם עיוותים אלו מוגבלת?
- (ב) כתבו פונקציית MATLAB בשם spectrum_3, הדומה ל spectrum_2, אך בנוסף, מבצעת הכפלה בחלון hanning לפני ביצוע של התמרת פורייה. ניתן ליצור את החלון בעזרת פקודת hann. ההכפלה בחלון

hanning משנה את האמפליטודה ולכן יש להכפיל את תוצאת ההתמרה ב $\sqrt{\frac{8}{3}}$.

ביצוע הניסוי

דגימת המידע

- חברו אלקטרודות לידו החזקה של הנבדק באופן הבא.
אלקטרודה לבנה מעל לחבור שבין הזרוע לאמה.
אלקטרודה שחורה במרכז הזרוע, כ- 3 ס"מ מעל לאלקטרודה הראשונה.
אלקטרודה ירוקה (הארקה) במרפק.
ציוד הדגימה עומד בתקן של ציוד בטיחותי לבדיקה של בני אדם ולכן יש חיבור של הארקה.
יש לבדוק שהאלקטרודות מחוברות היטב. אם האלקטרודות אינן נדבקות היטב (דבר הקורה אם שקית האלקטרודות נשארה פתוחה) אזי יש להחליפן באלקטרודות חדשות.
- במהלך הניסוי תבצעו 24 מדידות של EMG, כאשר זמן של כל מדידה הוא 30 שניות וזמן מנוחה בין מדידות הוא 90 שניות. הזמן הכולל של המדידות הוא קרוב לשעה.
- במהלך כל מדידה הנבדק יחזיק את הזרוע כשהיא אנכית לרצפה ואת האמה ב 90° , כלומר האמה מקבילה לרצפה. במהלך מדידה האמה והיד חופשיות באוויר, כאשר היד נושאת משקל מסוים. השתדלו שלא לזוז בזמן הדגימה. כמו כן, שימו לב שגופכם, כבלי האלקטרודה ומכשיר המדידה אינם בקרבה של מכשיר או כבל חשמלי.
- לפני התחלת המדידות, יש לשאת 4 ק"ג במשך 2 דקות רצופות ולאחר מכן לתת ליד לנוח במשך 3 דקות.
- הפעילו את תוכנית ה-Logger.vi. זוהי תוכנית הכתובה בשפת Labview, הדוגמת את הערוץ ב קצב דגימה של 250 דגימות בשנייה ושומרת את המדידות לתוך קובץ. שימו לב שתדר הדגימה (250Hz) קובע את האופן בו יש לנרמל את ציר התדר בגרף הצפיפות הספקטרלית.
- יש לבצע מדידות כאשר היד נושאת 1 ק"ג, 2 ק"ג, 3 ק"ג, או 4 ק"ג. יש לבצע 6 מדידות עבור כל משקל, כלומר סה"כ 24 מדידות. לאחר שהנבדק החזיק את המשקולת באופן הרצוי ועברו מספר שניות עד להתייצבות היד, השותף לניסוי יתחיל את המדידה באמצעות לחיצה על  (כפתור Run). לאחר ששעון המדידה במסך הגיע או עבר את ה-31, יש להפסיק את המדידה באמצעות לחיצה על Stop. בשלב זה הנבדק יניח את המשקולת ויאפשר לשרירים לנוח. אין חשיבות לכך שהדגימה לוקחת מעט יותר מ-30 שניות, משום שבמהלך עיבוד המידע, יעשה שימוש רק ב-30 השניות הראשונות.
- יש לשמור את קובץ הבדיקה תחת השם Sig_Akg_B, כאשר A הוא המשקל שהנבדק הרים ו-B הוא מספר המדידה עבור משקל זה. לדוגמא, Sig_3kg_5 מציין מדידה חמישית מתוך שש עבור משקל של 3 ק"ג.
- הקפידו על סדר מדידות צריך אקראי. לדוגמא, 4, 2, 1, 3, 2 ק"ג וכדומה.
- לאחר המדידה הראשונה, הציגו את האות בגרף באמצעות MATLAB. וודאו שהמערכת תקינה ושהאות שמתקבל סביר, בטרם תמשיכו במדידות.

- ענו על השאלות המופיעות בחלק זה של הניסוי במסגרת הדו"ח המסכם. שאלות עליהם לא הספקתם להשיב במהלך הפגישה יש להשלים בבית עד לפני הפגישה השנייה.
- ניתן לפנות בשאלות אל מדריך המעבדה גם לאחר הפגישה - מספר החדר, הדוא"ל והטלפון רשומים במעבדה ובאתר האינטרנט.
- הקפידו על כיתוב צירים וכותרת בגרפים. בשאלות בהן יש להציג מספר גרפים, יש לציירם זה לצד זה בעזרת פקודת subplot ולהשתמש בפקודת axis על מנת לקבל צירים אחידים עבור כל הגרפים.

שאלה 1

- (א) מדוע היה חשוב להקפיד על מנוחה בין כל ניסוי. מבחינה ביולוגית, מדוע דבר זה משפיע על התוצאות? מחינה מתמטית על איזו תכונה של האות זה משפיע?
- (ב) מדוע הנבדק נדרש לסחוב משקל לפני תחילת המדידות?
- (ג) מדוע הסתפקנו בתדר דגימה של 250 דגימות בשנייה.

- טענו את קבצי האותות שדגמתם לתוך מערך. ניתן להשתמש בקוד MATLAB כדוגמת זה שלהלן:

```
S = 7500; % Number of samples per trial
M = 6; % Number of trials per weight
N = 4; % Number of weights
emg = zeros(N*M,S);
for i = 1:N
    for k = 1:M
        data = load(['data/Sig_',num2str(i),'kg_',num2str(k),'.dat']);
        emg((i-1)*M+k,:) = data(1:7500,2);
    end
end
end
```

- לאותות שנמדדו מתלווה רעש בתדרים נמוכים, הנובע ממערכת המדידה. לפיכך, יש לסנן את האותות. השתמשו במסנן מעביר גבוהים מסדר 256 ותדר קטעון של 4 Hz. השתמשו בפקודות MATLAB ליצירת המסנן (למשל fir1) ולסינון האות (למשל filtfilt) – קראו את תיעוד הפקודות וודאו שאתם משתמשים בהן באופן נכון.
- יתכן שלאותות שנמדדו נכנס רעש מרשת החשמל בתדרים של 50Hz ושל 100Hz. סננו רעש זה באמצעות Band Stop Filter. ניתן להשתמש בפקודות ה MATLAB fir1 ו-filtfilt.
- בהמשך הניסוי, יש לעבוד אך ורק עם האותות המסוננים.

שאלה 2

- (א) חשבו את ספקטרום ה-EMG של פונקציית מדגם אחת ממשקל 2kg בעזרת הפונקציות spectrum_1, spectrum_2 ו-spectrum_3 משאלות ההכנה. הציגו את התוצאות זו מול זו. הציגו רק את חלקו החיובי של ציר התדר ושימו לב לנרמול של ציר התדר.
- (ב) מה ההבדל בין הגרפים המתקבלים משימוש בפונקציות spectrum_1 ו-spectrum_2? הסבירו.
- (ג) מהנדס ביצע חישוב ספקטרום ללא החלקה ולאחר מכן דגם של הספקטרום ביחס מסוים. באופן זה הוסרו מהגרף הקפיצות החדות שבין נקודות הדגימה של התדר, בדומה לתוצאות שקיבלתם. האם שיטה זו שקולה להחלקה שביצעתם? הסבירו.
- (ד) מה ההבדל בין הגרפים המתקבלים משימוש בפונקציות spectrum_2 ו-spectrum_3? הסבירו.
- בהמשך הניסוי השתמשו אך ורק בחישוב הספקטרום המתקבל בעזרת הפונקציה spectrum_3.

שאלה 3

- (א) חשבו את ספקטרום ה-EMG של פונקציית מדגם אחת עבור כל אחד מארבעת המשקלים. הציגו את התוצאות.
- (ב) התבוננו בארבעת הגרפים שהתקבלו. מהו תדר גיוס היחידות. תדר גיוס היחידות הוא התדר בו מתחילה עליה בספקטרום. תדר זה בד"כ בסביבות 8-12 Hz. האם יש משקלים בהם קל יותר לראות את התופעה? הסבירו.

שאלה 4

- (א) כתבו ביטוי למרכז המסה של פונקציית צפיפות ההספק. השתמשו בביטוי זה על מנת לחשב את תדר מרכז המסה עבור כל אחת מפונקציות המדגם. הציגו את התוצאות בטבלה, בה העמודות מציינות משקלים.
- (ב) הוסיפו לתחתית הטבלה את הממוצע וסטית תקן של מרכזי המסה שחישבתם, וזאת עבור כל אחד מארבעת המשקלים.
- (ג) כיצד משתנה תדר מרכז המסה כתלות במשקל? הסבירו.

שאלה 5

- (א) כתבו ביטוי להספק הכולל של האות. השתמשו בביטוי זה על מנת לחשב את ההספק עבור כל אחת מפונקציות המדגם. הציגו את התוצאות בטבלה, בה העמודות מציינות משקלים.
- (ב) הוסיפו לתחתית הטבלה את הממוצע וסטית תקן של ההספקים שחישבתם, וזאת עבור כל אחד מארבעת המשקלים.
- (ג) כיצד משתנה ההספק כתלות במשקל? הסבירו.

חלק ב'

דו"ח מכין

שערוך ליניארי אופטימאלי

המשערוך האופטימאלי של $X \in \mathbb{R}^n$ על סמך מדידת $Y \in \mathbb{R}^m$ הוא

$$\hat{X} = E[X | Y]$$

והמשערוך הליניארי האופטימאלי הוא

$$\hat{X} = H(Y - \mu_y) + \mu_x$$

כאשר

$$H = \Gamma_{xy} \Gamma_{yy}^{-1}$$

$$\Gamma_{xy} = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)^T] \quad \Gamma_{yy} = E[(Y - \mu_y)(Y - \mu_y)^T]$$

$$\mu_x = E[X] \quad \mu_y = E[Y]$$

H היא מטריצה מסדר $n \times m$, μ_y הוא ווקטור מסדר $m \times 1$ ו- μ_x הוא ווקטור מסדר $n \times 1$.

אם X, Y גאוסיים במשותף, אזי המשערוך האופטימאלי הוא ליניארי (או במילים אחרות, המשערוך הליניארי האופטימאלי הוא גם המשערוך האופטימאלי).

שאלה 1

(א) יהי $X \in \mathbb{R}$ ו- $Y \in \mathbb{R}$ ולכן $H = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}$. מה ההיגיון של נוסחת השערוך המתקבלת עבור

$H = 0$? מה ההיגיון של נוסחת השערוך המתקבלת עבור $X = Y$? הסבירו לאור זאת את משמעותם של

μ_x ושל $H(Y - \mu_y)$ בנוסחת המשערוך הליניארי האופטימאלי.

$$Y_1^{(1)}, Y_{2, \text{KKK}}^{(1)}, Y_m^{(1)}, X^{(1)}$$

$$Y_1^{(2)}, Y_{2, \text{KKK}}^{(2)}, Y_m^{(2)}, X^{(2)}$$

M

$$Y_1^{(q)}, Y_{2, \text{KKK}}^{(q)}, Y_m^{(q)}, X^{(q)}$$

(ב) יהי $X \in \mathbb{R}$ ו- $Y \in \mathbb{R}^m$. כמו כן נתונים q מדידות של X, Y , כלומר,

כתבו ביטוי ישיר ומפורש (באמצעות ארבעת פעולות החשבון בלבד) לשערוך של איברי הווקטור

Γ_{xy} ($1 \times m$) ושל איברי המטריצה Γ_{yy} ($m \times m$), על סמך q המדידות של X, Y .

שאלה 2

כתבו פונקציית MATLAB בשם `lin_est`, המחזירה את H , את μ_y ואת μ_x , בהינתן q מדידות של $X \in \mathbb{R}$ ו- $Y \in \mathbb{R}^m$. בסעיף זה אין חובה להשתמש בביטויים הישירים שכתבתם בשאלה הקודמת, כלומר ניתן להשתמש גם בפקודות `cov` ו-`mean`.

ביצוע הניסוי

- לצורך המשך הניסוי נחלק את פונקציות הדגימה לשניים. החלק הראשון, שיקרא סט לימוד, יכיל את פונקציות הדגימה האי-זוגיות של כל משקל (כגון `Sig_3kg_1`, `Sig_3kg_3`, `Sig_3kg_5`). החלק השני, שיקרא סט מבחן, יכיל את פונקציות הדגימה הזוגיות של כל משקל.

שאלה 6

- א) היעזרו בפונקציית `lin_est` משאלת ההכנה, על מנת לבנות משערך ליניארי אופטימאלי, שיקבל ככניסה את תדר מרכז המסה של הספקטרום ויוציא שערך של המשקל, אותו מרימה היד. לצורך בנית המשערך השתמשו ב-4 דגימות של סט הלימוד. יש לקחת את הדגימה ראשונה מכל משקל.
- ב) השתמשו במשערך שבניתם על מנת לשערך את המשקלים מתוך תדרי מרכז המסה של סט המבחן. חשבו את השגיאה הריבועית הממוצעת בין המשקל המשוערך והמשקל בפועל עבור כל דגימה והציגו את התוצאות בטבלה. הוסיפו לטבלה גם את השגיאה הריבועית הממוצעת עבור כל אחד מארבעת המשקלים.
- ג) הציגו גרף של משקל משוערך כתלות בתדר מרכז המסה. יש לשרטט פונקציה זו באמצעות קו רצוף. הוסיפו לגרף זה את נקודות סט הבדיקה.
- ד) מהי לדעתכם הבעיה המרכזית של המשערך במקרה זה? כיצד ניתן לפתור בעיה זו?

שאלה 7

חיזרו על השאלה הקודמת, כאשר השערך מבוצע על סמך הספק האות.

שאלה 8

חיזרו על סעיפים א' ו-ב' של השאלות הקודמות, כאשר השערך מבוצע על סמך תדר מרכז המסה והספק האות.

שאלה 9

השוו את השגיאות הריבועיות הממוצעות, המתקבלות בשלושת השאלות הקודמות. הסבירו את התוצאות.

שאלה 10

- א) השתמשו במשעריך של המשקל על פי הספק האות. בשאלה זו יש לבנות משערכים ליניאריים אופטימאליים על סמך 4, 8, ו-12 מדידות מתוך סט הלימוד. עבור כל אחד מהמשקלים, שרטטו גרף של השגיאה הריבועית הממוצעת כתלות במספר הדגימות ששימשו לבניית המשעריך.
- ב) העריכו כיצד ממשיך הגרף עד אינסוף. בהנחה שידועה לכם התנהגות הגרף, האם קיים לדעתכם מספר דגימות אופטימאלי? במידה שכן, הסבירו כיצד לבחור מספר זה.

שאלה 11

הציעו שיפור או תוספת אפשרית לניסוי, ישמו את השיפור שהצעתם ונתחו את התוצאות המתקבלות. הסבירו ותעדו את עבודתכם. על שיפורים מעניינים יתקבל בonus לציון.

משוב (רשות)

היכן וכיצד נדרש לדעתכם לשפר את התדריך, את אופן ביצוע הניסוי, את תכולתו או כל דבר רלוונטי אחר?